

具 $R(X) < 2$ 的自反 Banach 空间中的 M 不动点性质

李晶婧, 崔云安

(哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: 对于 Banach 空间中的两个有界闭凸集, 首先引入一个新的度量, 并且在这种新的度量下重新定义非扩张映射, 称它为 M 非扩张映射, 并且证明在一个自反的 Banach 空间中, 当 $R(X) < 2$ 时, 它有 M 不动点性质.

关键词: M 非扩张映射; 不变; 渐进不动点序列; M 不动点性质

中图分类号: O177.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2009)05-0097-03

M fixed Point Property in Reflexive Banach Space with $R(X) < 2$

LI Jing-jing, CUI Yun-an

(School of Applied Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: We first introduce a new metric between two bounded closed subsets of a Banach space and with this new metric we redefine the nonexpansive mapping, which we call M -nonexpansive mapping. It proved that in a reflexive Banach space with $R(X) < 2$ has the M fixed point property.

Key words: M -nonexpansive mapping; invariant; approximated fixed point sequence; M fixed point property

1 引言与预备知识

Banach 空间中的几何性质和不动点性质有着非常强的相互作用, 特别是在度量不动点问题中, 几何性质起着关键作用. 有时, 为了描述这些几何性质, 最常用的方法就是定义一个实函数,

并且定义和这个函数相关的适当的系数, 例如文 [1-3]. J. Caristi-Falset 在 [4] 中定义了这样一个系数:

$$R(X) = \sup \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n + x\| : x, x_n \in B_X, n = 1, 2, \dots, x_n \right\}$$

其中, B_X 表示 Banach 空间中的单位球面. 这个系数有很多特点, 例文 [4, 5] 中 X 是有限维时, $R(X) = 1$; $R(C_0) = R(l_1) = 1$

更重要的是它和不动点性质有着紧密联系, 这为我们研究不动点性质提供了一种新的方法, 并且可以证明在一个自反的 Banach 空间中, 当 $R(X) < 2$ 时, 对于集值的 M 非扩张映射, 它有 M 不动点性质.

为方便起见, $CB(X)$ 和 2^X 分别代表度量空间 X 的非空有界闭集族和 X 的所有子集族.

定义 1 设 X 为度量空间, 一个集值 $T: X \rightarrow CB(X)$ 称作是 M Lipschitz 映射, 如果存在 $\lambda \geq 0$ 使得

$$M(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

其中, $M(Tx, Ty) = \sup \{ \|u - v\| : u \in Tx, v \in Ty \}$.

当 $\lambda = 1$ 时, T 称作 M 非扩张的, 当 $\lambda < 1$ 时, T 称作 M 集值压缩的.

定理 1^[6] 设 (X, d) 为完备的度量空间, $T: X \rightarrow CB(X)$ 是一个集值压缩的, 那么 T 在 X 中有不

收稿日期: 2007-10-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10571037); 黑龙江海外学人资助项目

作者简介: 李晶婧 (1981—), 女, 硕士研究生, E-mail: li-jiangling@163.com;

崔云安 (1961—), 男, 教授, 博士生导师.

动点.

从定理1知如果 (X, d) 是一个完备的度量空间, 并且 $T: X \rightarrow CB(X)$ 为 M 集值压缩时, T 在 X 中有不动点.

定义2 (X, d) 为一度量空间, T 为从 X 到 2^X 的集值映射. 一个序列 $\{x_n\}$ 称为渐近不动点序列, 如果当 $n \rightarrow \infty$ 时 $d(x_n, Tx_n) \rightarrow 0$.

定理2 K 为 Banach 空间中的一个有界闭凸集, $T: X \rightarrow CB(X)$ 是 M 非扩张映射, 那么存在一个序列使得 $n \rightarrow \infty$ 时 $d(x_n, Tx_n) \rightarrow 0$.

证明: 取 $x_0 \in K$ 选取一个序列 $\{k_n\}$ 使得 $0 < k_n < 1, k_n \rightarrow 0$. 定义映射 $T_n x = k_n x_0 + (1 - k_n) Tx$, 那么对于每个 n , T_n 都有一个不动点 x_n . 从而 $\exists y_n \in Tx_n$ 使得 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n = k_n x_0 + (1 - k_n) y_n$. $\|x_n - y_n\| = k_n \|x_0 - y_n\| \rightarrow 0$, 并且

$$0 \leq d(x_n, Tx_n) = \inf\{\|x_n - y_n'\| : y_n' \in Tx_n\} \leq \|x_n - y_n\| \rightarrow 0$$

定义3 设 X 为 Banach 空间, T 为从 X 到 2^X 的集值映射. X 的子集 K 对于 T 称作是不变的, 如果对于每个 $x \in K, Tx \subset K$.

定理3 设 K 为自反 Banach 空间 X 的一有界闭凸集, 如果 $T: K \rightarrow CB(K)$ 是 M 非扩张映射, 那么存在一个子集 K_0 使其对于 T 是最小的, 也就是说, K_0 中没有有界闭凸集使得它对于 T 是不变的.

定义4 设 X 为 Banach 空间, B 为 X 一子集, X 中的序列 $\{x_n\}$ 对于 B 的渐近半径和中心分别定义为:

$$r_a(\{x_n\}, B) = \inf\{\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| : y \in B\}$$

$$Z_a(\{x_n\}, B) = \{y \in B : \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| = r_a(\{x_n\}, B)\}$$

定义5 称空间 X 具有 M 不动点性质, 如果对于 X 的任意有界闭凸集和任意的 M 非扩张映射 $T: K \rightarrow CB(K)$, 有 $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$, 其中 $\text{Fix}(T) = \{x \in K, x \in Tx\}$.

2 主要结果

在证明主要结果前, 需要证明几个引理.

引理1 K 为 Banach 空间 X 一有界闭凸集, $T: K \rightarrow CB(K)$ 是 M 非扩张的. 假设对于 T , K 是最小的, 并且 $\{x_n\}$ 为 K 的渐近不动点序列, 那么 $Z_a(\{x_n\}, K) = K$.

证明: 令 $Z_{a,\varepsilon}(\{x_n\}, K) = \{y \in K : \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| \leq r_a(\{x_n\}, K) + \varepsilon\}$

$$\leq r_a(\{x_n\}, K) + \varepsilon\}$$

容易验证 $Z_{a,\varepsilon}(\{x_n\}, K)$ 是非空、闭和凸的, 往证它对于 T 是不变的. 因 $\{x_n\}$ 是一渐近不动点序列, 从而存在 $y_n \in Tx_n$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$.

取 $y \in Z_{a,\varepsilon}(\{x_n\}, K)$, 那么 $y \in K$ 并且 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| \leq r_a(\{x_n\}, K) + \varepsilon$.

对于每一个 $y \in Ty$, 有:

$$\begin{aligned} \|x_n - y'\| &= \|x_n - y_n + y_n - y'\| \leq \\ &\|x_n - y_n\| + \|y_n - y'\| \leq \\ &\|x_n - y_n\| + M(Tx_n, Ty) \leq \\ &\|x_n - y_n\| + \|x_n - y\| \end{aligned}$$

当 n 趋于无穷大时,

$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y'\| \leq r_a(\{x_n\}, K) + \varepsilon$, 由 ε 的任意性, $y \in Z_{a,\varepsilon}(\{x_n\}, K)$, 故 $Z_{a,\varepsilon}(\{x_n\}, K)$ 对于 T 是不变的. K 的最小性意味着 $Z_{a,\varepsilon}(\{x_n\}, K) = K$, 并且

$$Z_{a,\varepsilon}(\{x_n\}, K) = \bigcap_{\varepsilon > 0} Z_{a,\varepsilon}(\{x_n\}, K) = K$$

引理2 设 X 为自反的 Banach 空间, K 为 X 的一个有界闭凸集, $T: K \rightarrow CB(K)$ 是 M 非扩张的. 若 K 对于 T 是最小不变子集, 并且 $\{x_n\}$ 是一渐近不动点序列, 那么, 对于每个 $y \in K$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y - x_n\| = \text{diam}(K)$$

证明: 因为 $T(K) \subset K$, 从而有 $\overline{\text{co}}(T(K)) \subset K$. 由此 $\overline{\text{co}}(T(K))$ 是 K 的一个有界闭凸集, 并且对于 T 是不变的. K 的最小性意味着 $K = \overline{\text{co}}(T(K))$. 又 K 是自反 Banach 空间中的一有界闭凸集, 故 K 是弱紧的, 从而 $Z(K)$ 是一非空集. 令 $x \in Z(K)$, 对任给的 $y \in K$, 有 $\|x - y\| \leq r(K)$.

对任给的 $x \in Tx, y \in Ty$ 有:

$$\|x' - y'\| \leq M(Tx, Ty) \leq \|x - y\| \leq r(K).$$

因此 $T(K)$ 包含在闭球 $\overline{\text{球}}(x', r(K))$ 中, 这意味着 $\overline{\text{co}}T(K) = K \subset \overline{\text{球}}(x', r(K))$.

故 $\sup\{\|y - x'\| : y \in K\} \leq r(K)$.

因而 $x \in Z(K)$, 即 $Tx \subset Z(K)$.

下证对每一个 $y \in K$ 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|y - x_n\| = \text{diam}(K)$$

事实上, 假设存在 $y \in K$ 使得 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|y - x_n\| < \text{diam}(K)$, 令 $r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|y - x_n\|$, $d = \text{diam}(K)$ 并且考虑集族 $\{\overline{\text{球}}(Z, r + d/2) \cap K : Z \in K\}$. 选取 $0 < \varepsilon < (d - r)/2$, 由引理1对于 $\forall z \in K$, 有 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| = r$. 因此, 对于 K 的任意有限集 $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$, 存在某个正整数 N 使得对于每一个 $i = 1, 2, \dots, k$,

$\|x_n - z_i\| \leq r + \varepsilon = (r + d)/2$ 成立. 故 $x_n \in \bigcap_{z \in K} (z_i, (r + d)/2)$, 由 K 的弱紧性意味着存在 x_0 , 使得 $x_0 \in \bigcap_{z \in K} (z_i, (r + d)/2)$. 并且这个点不是直径点, 因为

$$\sup_{z \in K} \|z - x_0\| \leq (r + d)/2 < d = \text{diam}(K)$$

矛盾. 如果对于某些 $y \in K$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|y - x_n\| < \text{diam}(K)$ 那么存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{y_n\}$ 使得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| < \text{diam}(K)$$

同理得到一个矛盾, 因为渐近不动点序列的子列仍是渐近不动点序列.

引理 3 设 X 为一自反的 Banach 空间, K 为 X 的一有界闭凸集, $T: K \rightarrow CB(K)$ 为 M 非扩张映射. 若 K 对于 T 是最小的, $\text{diam}(K) = 1$ 并且 $\{x_n\}$ 对于 T 为一弱零的渐近不动点序列. 那么, 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 K 中的一个序列 $\{z_n\}$ 使得

- 1) $\{z_n\}$ 弱收敛于 K 中的一点 z ;
- 2) 对于每个 $n \in N$, $\|z_n\| > 1 - \varepsilon$;
- 3) $\|z_n - z_m\| \leq \frac{1}{2}$;
- 4) $\limsup_n \|z_n - x_n\| \leq \frac{1}{2}$.

证明: 令 $0 \in K$ 若 $\{w_n\}$ 为 K 的一渐近不动点序列. 由引理 2 知 $\lim_n \|w_n\| = 1$. 因此, 对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta(\varepsilon) > 0$ 使得当 $x \in K$ 时, $\|x\| > 1 - \varepsilon$, 并且 $d(x, Tx) < \delta(\varepsilon)$. 否则, 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 对于每个 $n \in N$ 对于 T 可以找到 $w_n \in K$ 并且有 $d(w_n, Tw_n) < \frac{1}{n}$, $\|w_n\| \leq 1 - \varepsilon_0$. 因此 $\{w_n\}$ 为 K 中的一渐近不动点序列. 并且满足 $\limsup_n \|w_n\| \leq 1 - \varepsilon_0$. 令 $\varepsilon > 0$, 选择 $r < \min\{1, \delta(\varepsilon)\}$, 并且对于每个 $n \in N$, 定义映射 $T_n x = (1 - r)Tx + \frac{r}{2}x_n$. 因此对于每个 n , T_n 都有一个不动点 z_n . 故对每一个 $n, m \in N$, 存在 z_n, z_m 使得

$$z_n \in T_n z_n = (1 - r)Tz_n + \frac{r}{2}x_n$$

$$z_m \in T_m z_m = (1 - r)Tz_m + \frac{r}{2}x_m$$

因此存在 $z_n \in Tz_n, z_m \in Tz_m$ 使得

$$z_n = (1 - r)z_n' + \frac{r}{2}x_n$$

$$z_m = (1 - r)z_m' + \frac{r}{2}x_m$$

$$\|z_n - z_m\| = \|(1 - r)z_n' + \frac{r}{2}x_n - (1 - r)z_m' - \frac{r}{2}x_m\|$$

$$\frac{r}{2}\|x_n\| \leq (1 - r)\|z_n' - z_m'\| +$$

$$\frac{r}{2}\|x_n - x_m\| \leq (1 - r)M(Tz_n, Tz_m) +$$

$$\frac{r}{2}\|x_n - x_m\| \leq (1 - r)\|z_n - z_m\| +$$

$$\frac{r}{2}\|x_n - x_m\|$$

由此,

$$r\|z_n - z_m\| \leq \frac{r}{2}\|x_n - x_m\| \leq \frac{r}{2}$$

并且对每个 $n, m \in N$,

$$\|z_n - z_m\| \leq \frac{1}{2}$$

因 $\{x_n\}$ 是渐近不动点序列, 故当 $n \rightarrow \infty$ 时 $d(x_n, Tx_n) \rightarrow 0$, 于是存在 $y_n \in Tx_n$ 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$

$$\|z_n - x_n\| = \|(1 - r)z_n' + \frac{r}{2}x_n - x_n\| =$$

$$\|(1 - r)z_n' - (1 - r)y_n +$$

$$(1 - r)y_n + \frac{r}{2}x_n\| \leq$$

$$(1 - r)\|z_n' - y_n\| + (1 - r) \times$$

$$\|y_n - x_n\| + \frac{r}{2}\|x_n\| \leq$$

$$(1 - r)M(Tz_n, Tz_m) +$$

$$(1 - r)\|y_n - x_n\| + \frac{r}{2}\|x_n\| \leq$$

$$(1 - r)\|z_n - x_n\| + (1 - r) \times$$

$$\|y_n - x_n\| + \frac{r}{2}\|x_n\|$$

$$\text{从而 } \|z_n - x_n\| \leq \frac{1}{2} + \frac{r}{1 - r}\|x_n - y_n\|$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时取其上确界的极限, 可得 4).

$$d(z_n, Tz_n) = \inf \left\{ \|(1 - r)z_n' + \frac{r}{2}x_n - y_n\| : y_n \in Tx_n \right\} \leq$$

$$\|(1 - r)z_n' + \frac{r}{2}x_n - z_n\| =$$

$$r\|z_n' - \frac{1}{2}\| \leq r \leq \delta(\varepsilon)$$

因此 $\{z_n\}$ 满足 (ii)

因 K 为自反 Banach 空间的有界闭凸集, 故 K 为弱紧的, 由此 $\{z_n\}$ 满足 1).

故可以找到一个序列满足 1) - 4).

现在证明主要结果.

定理 3 设 X 是一自反的 Banach 空间并且

(下转第 104 页)

取 $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$, $\{y_i\} \subset F$, 使得 $\|x_{n_i} - y_i\| \leq 2^{-i}$. 由文 [3] 中的定理得 $\{y_i\} \subset F$ 是 Cauchy 列且收敛, 设 $y_i \rightarrow y$, 由于 F 是闭集, 所以 $y \in F$ 且 $x_{n_i} \rightarrow y$; 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|$ 存在, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| = 0$, $y \in F$. 证毕.

参考文献:

- [1] CH DUME C E, OFOEDU E U, ZEGEYE H. Strong and Weak Convergence Theorems for Asymptotically Nonexpansive Mapping [J]. Math, Anal, Appl, 2003, 280: 364 - 374.
- [2] SHAHZAD N. Approximating Fixed Point for Nonself Nonexpansive Mapping in Banach Spaces [J]. Nonlinear Analysis, 2005, 61: 1031 - 1039.
- [3] TAN K K, XU H K. Approximating Fixed Point for Nonexpansive

Mapping by the Ishikawa Iteration Process [J]. Math, Anal, Appl, 1993, 178: 301 - 308.

- [4] TIAN Y X, CHANG S S, HUANG J L. On the Approximation Problem of Common Fixed Points for a Finite Family of Nonself Asymptotically Quasi - nonexpansive-type Mapping in Banach Space [J]. Computers and Mathematics Appl, 1996, 53: 289 - 291.
- [5] 野金花, 崔云安. ϕ 强伪压缩映象不动点的近似逼近 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2005, 10 (6): 19 - 20.
- [6] 赵晓全. 渐近非膨胀映射的不动点 [J]. 哈尔滨电工学院学报, 1993, 16: 284 - 287.
- [7] 赵晓全. 带边界条件非膨胀映射的不动点 [J]. 纯粹数学与应用数学, 1989, 5: 86 - 87.

(编辑:付长缨)

(上接第 99 页)

$R(X) < 2$, 那么 X 有 M 不动点性质.

证明: 若 X 没有 M 不动点性质, 那么可以找到一有界闭凸集 K 使得 $\text{diam}(K) = 1$, 并且对于某一集值的 M 非扩张映射是最小不变的且存在 $\{x_n\}$ 为 K 中的渐近不动点序列. 因 K 为自反 Banach 空间的有界闭凸集, 故 K 为弱紧的, 因而可假设 $\{x_n\}$ 是弱收敛的, 由平移关系 $\{x_n\}$ 是弱零的. 考虑序列 $\{z_n\}$, 并且 $\{z_n\}$ 满足引理 3 中的 1) ~ 4). 如需需要, 可以取其子列, 并且假设 $\lim_n \|z_n - z\|$ 存在. 并有

$$\lim_n \|z_n - z\| \leq \lim_n \sup_m \lim_m \|z_n - z_m\| \leq \frac{1}{2}.$$

可以选择 $\eta > 0$ 使得 $\eta R(X) < 1 - R(X)/2$ 对于足够大的 n , 有 $\|z_n - z\| \leq 1/2 + \eta$, $\|z\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x_n\| \leq 1/2$ 因此

$$\left\| \frac{z_n}{1/2 + \eta} \right\| = \left\| \frac{z_n - z}{1/2 + \eta} + \frac{z}{1/2 + \eta} \right\| \leq R(X)$$

故 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_n\| \leq R(X)(1/2 + \eta) < 1$ 与

$0 \in K$ 矛盾.

参考文献:

- [1] BANAS J. On Modulus of Noncompact Convexity and its Properties [J]. Canada Math Bull, 1987, 30: 186 - 192.
- [2] BENAVIDES T D, ACEDO G L. Lower Bounds for Nomal Structure Coefficients [J]. Proc Royal Soc Edinburgh, 1992, 121: 245 - 252.
- [3] GOEBEL K, SEKOWSKI T. The modulus of Noncompact Convexity [J]. Ann Univ Mariae Cubrie - Skłodowska, 1984, 38: 41 - 48.
- [4] GARCÍA-Falset J. Stability and Fixed Points for Nonexpansive Mappings [J]. Houston J. Math, 1994, 20: 495 - 505.
- [5] GARCÍA-Falset J. The Fixed Point Property in Banach Spaces with NUS Property [J]. J. Math. Anal. Appl, 1997, 215: 532 - 542.
- [6] JR N. S. B., Multivalued Contraction Mapping [J]. Pacif J. Math, 1969, 30: 475 - 488.

(编辑:王 萍)